



Лекция 4: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЭРОФОТОСНИМКА. ТЕОРИЯ ОДИНОЧНОГО СНИМКА

Вопросы:

- 4.1 Центральная проекция, как основа аэрофотоснимка. Основные элементы центральной проекции.
- 4.2 Главная точка аэрофотоснимка, точка надира, точка нулевых искажений. Их положение в проекции и на аэрофотоснимке.
- 4.3 Перспектива точки и прямой на пространственном чертеже.
- 4.4 Теорема Шаля. Понятие об эпюрах.
- 4.5 Перспектива сетки квадратов на эпюре.
- 4.6 Теория одиночного снимка.
- 4.7 Системы координат, применяемые в фотограмметрии.
- 4.8 Элементы внутреннего и внешнего ориентирования снимка.
- 4.9 Связь координат соответствующих точек наклонного снимка и местности.
- 4.10 Зависимость между координатами точек наклонного и горизонтального снимков.
- 4.11 Масштаб изображения на аэрофотоснимке.
- 4.12 Главный, средний и частный масштабы аэрофотоснимка.
- 4.13 Смещение изображения контурной точки на аэрофотоснимке из-за влияния рельефа местности.
- 4.14 Смещение контурных точек на снимке за угол наклона.
- 4.15 Искажение площадей на наклонном снимке.

Литература

1. Назаров, А.С. Фотограмметрия: учебное пособие для студентов вузов / А. С. Назаров. -Мн.: ТетраСистемс, 2006. –368 с.
2. Ильинский, М.Д., Фотограмметрия и дешифрирование снимков / М.Д. Ильинский, А.И. Обиралов, А.А. Фостиков. - М.: Недра, 1986.– 375с.
3. Обиралов, А.И. Фотограмметрия и дистанционное зондирование: учебное пособие для студентов высших учебных заведений / А.И. Обиралов, А.Н.Лимонов, Л.А.Гаврилова. – М.: КолосС, 2006. – 336 с.

Вопрос 4.1 Центральная проекция, как геометрическая основа аэрофотоснимка. Основные элементы центральной проекции.

Для решения многих задач, особенно в инженерном деле, широко используют изображения объектов, построенные тем или иным методом на плоскости или на поверхности. Построение изображения какого-либо предмета (объекта) на избранной поверхности по определенному закону называется проектированием, а его результат – *проекцией*. Естественными примерами проекции являются: картина, созданная по законам зрительного восприятия; фотографическое изображение, полученное в плоскости прикладной рамки съемочной камеры лучами, проходящими

через объектив; изображение объекта на сетчатке глаза; топографическая карта и т. п.

При центральном проектировании проекция точки пространства находится как след сечения прямой, проходящей от нее через центр проекции, с поверхностью, на которую выполняется проектирование. *Центром проекции* называется точка, через которую проходят все проектирующие лучи. Плоскость, на которой строится изображение объектов, называется картинной. Совокупность лучей, с помощью которых получено изображение в фокальной плоскости, называется *связкой* или *пучком*.

На рис. 4.1 изображены точки местности A, B, C, O , центр проекции S и две плоскости: $P_{нег}$ и $P_{поз}$.

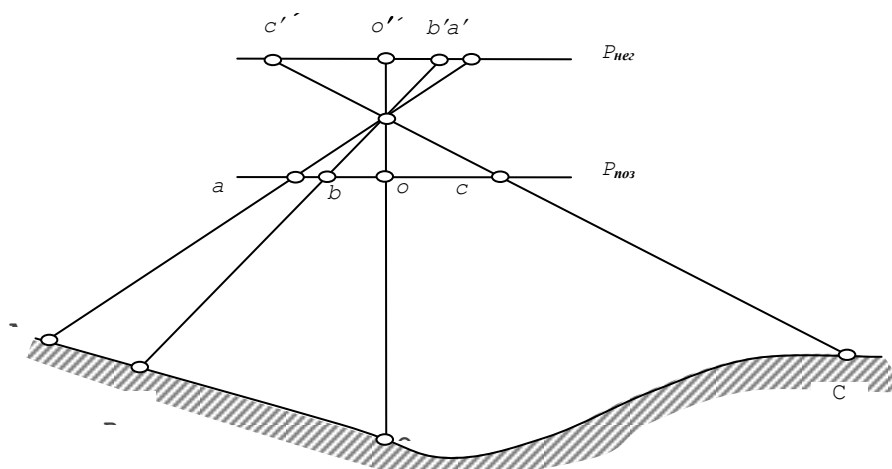


Рис. 4.1. Аэроснимок – центральная проекция

Плоскость $P_{нег}$, расположенная по одну сторону от центра проекции и местности, называется *негативной*, а плоскость $P_{поз}$, расположенная между центром проекции и местностью – *позитивной*.

Изображения точек местности на плоскостях $P_{нег}$ и $P_{поз}$ получены путем центрального проектирования из центра проекции S , прямолинейными проектирующими лучами AS, BS, CS и OS . Точки a, b, c, o и соответствующие им точки a', b', c', o' получены как следы пересечения проектирующих лучей с плоскостями $P_{поз}$ и $P_{нег}$ и являются центральными проекциями соответствующих точек местности. Результатом центрального проектирования местности является изображение, построенное фотообъективом: прямолинейные проектирующие лучи, исходящие от точек местности, проходят через центр проекции и строят изображение в фокальной плоскости.

Если удаления So' и So плоскостей $P_{нег}$ и $P_{поз}$ от центра проекции одинаковы и равны фокусному расстоянию съемочной камеры f , то построенные на них изображения различаются только порядком размещения точек, взаимное расположение которых на плоскостях зависит от их расстояния до местности, т. е. от высоты фотографирования.

В последующем будем использовать преимущественно позитивные изображения, соответствующие контактному отпечаткам с аэронегативов. Такие изображения более четко отражают взаимное расположение объектов, их частей и полностью соответствуют местности.

Спроектируем на плоскость P точки A, B, O, C отвесными проектирующими лучами (рис. 4.2) и получим их ортогональные проекции a_0, b_0, o и c_0 . Заметим, что масштаб изображения 1:1, и перемещение плоскости P в положение P' не изменит ни масштаба, ни подобия объектов местности, т. е. изображения, представленные точками a_0, b_0, o, c_0 и a'_0, b'_0, o', c'_0 тождественны.

Выберем центр проекции S и спроектируем те же точки на плоскости P и P' (рис. 4.2). Как легко видеть, полученные изображения, представленные точками a, b, c и a', b', c' соответственно, не являются тождественными, а их масштаб зависит от положения плоскости, на которую выполнено проектирование. Такие изображения не являются планом местности, и несут некоторые искажения геометрического характера, особенно если плоскости не горизонтальны.

Сопоставляя изображения, представленные точками на плоскостях P и P' , можно сделать вывод о том, что ортогональное проектирование есть частный случай центрального проектирования, когда центр проекции находится в бесконечности.

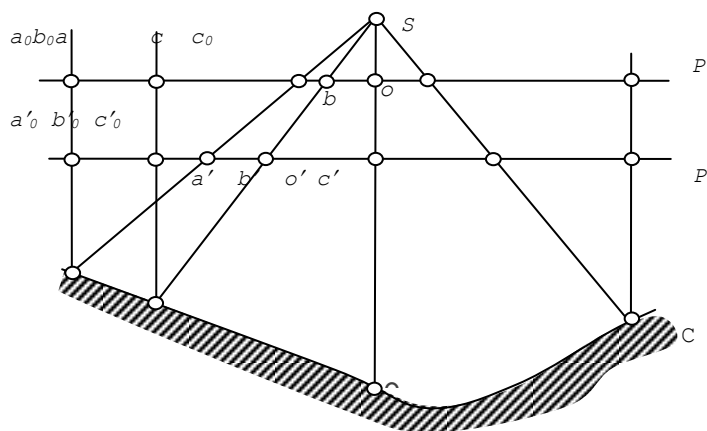


Рис. 4.2. Ортогональная и центральная проекции

Построенные по законам центрального проектирования перспективные изображения обладают следующими очевидными свойствами:

1. Всякая точка, расположенная в пространстве объектов, изображается в картинной плоскости также точкой.
2. Всякая прямая, если она не проходит через центр проекции, изображается в картинной плоскости также прямой.
3. Точки пространства, расположенные в одной проектирующей плоскости и не лежащие на одной прямой, изображаются в картинной плоскости расположенными на одной прямой.

При изучении основных законов центрального проектирования применительно к фотограмметрии будут использоваться основные элементы центральной проекции (рис. 4.3):

E – предметная плоскость, содержащая проектируемые объекты (в фотограмметрии это горизонтальный участок земной поверхности);

P – картинная плоскость, в которой строится изображение объектов (в фотограмметрии это плоскость аэроснимка);

S – центр проекции;

TT – основание картины, или ось перспективы – линия пересечения предметной и картинной плоскостей;

W – плоскость главного вертикала, проходящая через центр проекции перпендикулярно к предметной и картинной плоскостям;

v_0 – главная точка основания картины – точка пересечения основания картины TT с плоскостью главного вертикала W ;

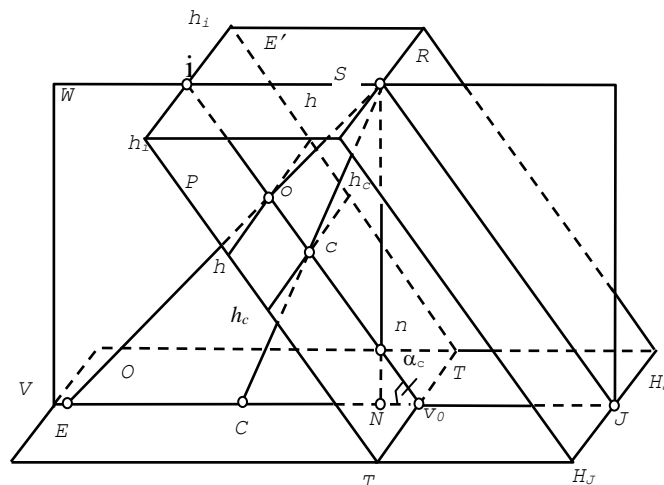


Рис. 4.3. Элементы центральной проекции

E' – плоскость действительного горизонта, проходящая через центр проекции S параллельно предметной плоскости;

$h_i h_i$ – линия действительного горизонта, сечение картинной плоскости с плоскостью действительного горизонта;

i – главная точка схода, пересечение линии действительного горизонта $h_i h_i$ с картинной плоскостью;

$V_0 i$ – главная вертикаль, линия пересечения картинной плоскости с плоскостью главного вертикала;

$v_0 V$ – проекция главной вертикали, линия пересечения предметной плоскости с плоскостью главного вертикала (направление съемки);

R – разделяющая плоскость, проходящая через центр проекции параллельно картинной плоскости;

$H_i H_i$ – линия картинного горизонта, линия пересечения предметной плоскости и разделяющей;

J – главная точка схода предметной плоскости, точка пересечения линии картинного горизонта с разделяющей плоскостью;

S_o – главная оптическая ось съёмочной камеры, проходящая через центр проекции перпендикулярно картинной плоскости. Отрезок S_o равен фокусному расстоянию съёмочной камеры f ;

o – главная точка картинной плоскости (аэроснимка), точка пересечения главной оптической оси с картинной плоскостью;

O – проекция главной точки картинной плоскости, точка пересечения главной оптической оси с предметной плоскостью;

n – точка надира, точка пересечения картинной плоскости с отвесной линией, опущенной из центра проекции;

N – проекция точки надира, точка пересечения предметной плоскости с отвесной линией, опущенной из центра проекции. Отрезок SN соответствует высоте фотографирования;

α_c – угол наклона картинной плоскости (аэроснимка), отсчитываемый между главной оптической осью и отвесной линией (или между главной вертикалью и ее проекцией);

s – точка нулевых искажений, точка пересечения биссектрисы угла наклона картинной плоскости, отсчитываемого в точке S , с главной вертикалью;

S – проекция точки нулевых искажений, точка пересечения предметной плоскости с биссектрисой угла наклона аэроснимка, отсчитываемого в точке S .

Любая прямая картинной плоскости, проходящая параллельно основанию картины, называется *горизонталью*. Горизонталь hh , проходящая через главную точку аэроснимка, называется *главной горизонталью*, а проходящая через точку нулевых искажений ($h_c h_c$) – *линией неискаженных масштабов*.

Элементы предметной плоскости принято обозначать прописными буквами латинского алфавита, а картинной плоскости – строчными.

Вопрос 4.2 Главная точка аэрофотоснимка, точка надира, точка нулевых искажений. Их положение в проекции и на аэрофотоснимке

На рис.4.4 изображен разрез пространственного чертежа в плоскости главного вертикала W и значения некоторых углов между основными линиями. Из соответствующих треугольников легко получить следующие формулы, определяющие взаимное положение основных элементов центральной проекции:

$$\left. \begin{aligned}
 So = So^0 = f, \quad Si = ic = \frac{f}{\sin \alpha_c}, \\
 on = f \operatorname{tg} \alpha_c, \quad oc = f \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_c}{2} \right) = f \frac{1 - \cos \alpha_c}{\sin \alpha_c}, \\
 oi = f \operatorname{ctg} \alpha_c, \quad SN = H, \\
 ON = H \operatorname{tg} \alpha_c, \quad SJ = iv_0 = \frac{H}{\sin \alpha_c}, \\
 Sn = \frac{f}{\cos \alpha_c} \quad Cv_o = cv_o = \frac{H - f}{\sin \alpha_c}.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Дополним рис. 4.4 сечением горизонтальной плоскостью P^0 , проходящей через точку нулевых искажений параллельно предметной плоскости. Точку пересечения отвесной линии SN с горизонтальной плоскостью P^0 обозначим o^0 .

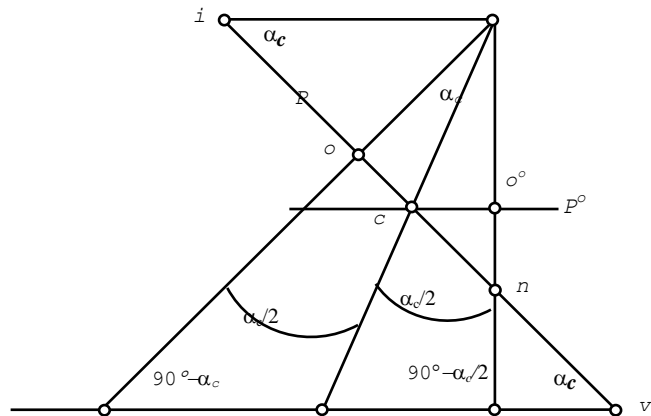


Рис. 4.4. Взаимное положение основных точек центральной проекции

Легко видеть, что треугольники Sic и cv_0C – равнобедренные, а треугольники ocS и o^0cS равны, поскольку

$$\angle ioS = \angle v_0o^0S = 90^\circ$$

и

$$\angle icS = \angle v_0cC = \angle Sco^0 = 90^\circ - \alpha / 2 .$$

Равенство отрезков oS и o^0S , вытекающее из равенства треугольников ocS и o^0cS , означает, что плоскости P и P^0 представляют собой наклонный и горизонтальный снимки, полученные из одного центра фотографирования S одной съемочной камерой с фокусным расстоянием f и пересекающиеся по линии неискаженных масштабов h_ch_c . Иначе говоря, P^0 – это проекция наклонного снимка P на горизонтальную плоскость.

Этот факт широко используются при обработке материалов аэро-фотосъемки и в конструкциях ряда фотограмметрических приборов.

Вопрос 4.3 Перспектива точки и прямой на пространственном чертеже

Пусть в предметной плоскости дана прямая KB , и требуется построить ее проекцию kb в картинной плоскости (рис. 4.5).

Искомая проекция kb лежит в проектирующей плоскости W_1 , проходящей через центр проекции S и прямую KB , потому для ее нахождения достаточно построить плоскость W_1 и провести проектирующие лучи SK и SB .

Поскольку прямая KB принадлежит плоскостям E и W_1 , то линией их пересечения является продолжение прямой до ее пересечения с основанием картины TT в точке l_1 .

Плоскость W_1 пересекает плоскость действительного горизонта E' по прямой Si_1 , причем, отрезок Si_1 параллелен исходной прямой AB , поскольку оба они лежат в параллельных плоскостях E и E' .

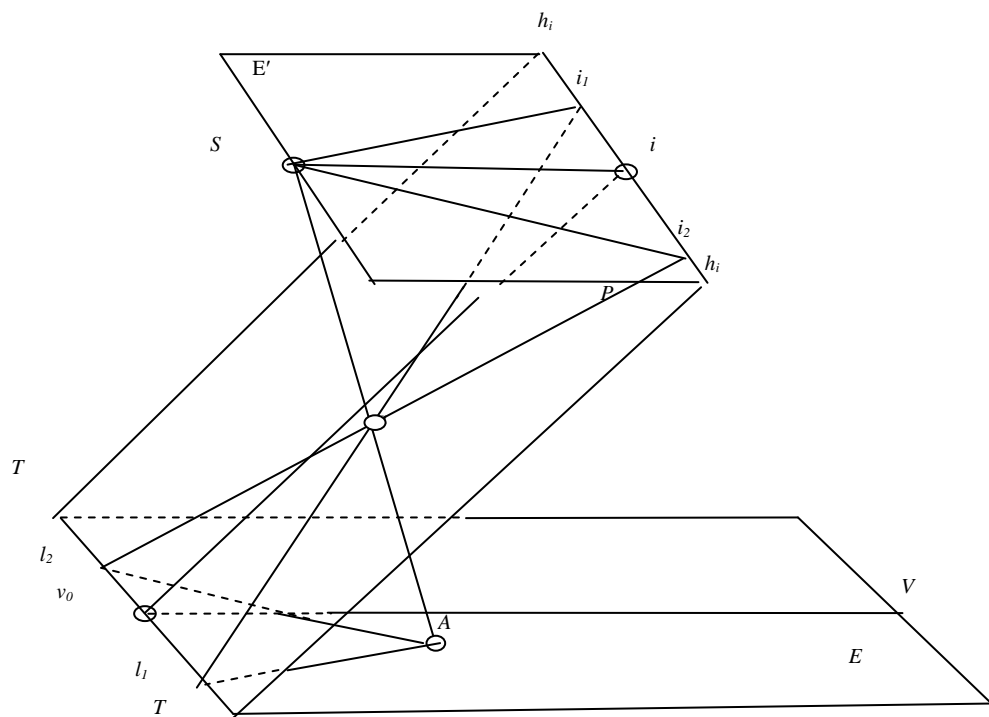


Рис. 4.5 Перспектива точки

Точки i_1 и l_1 принадлежат картинной P и проектирующей Q плоскостям, и потому соединяющая их прямая i_1l_1 является линией пересечения плоскостей P и W_1 .

Теперь для нахождения искомой проекции kb достаточно провести проектирующие лучи SA и SB , пересечение которых с линией i_1l_1 даст точки k и b .

Точка i_l называется точкой схода перспективы прямой предметной плоскости AB , линия $i_l l$ – направлением перспективы этой прямой, а точка l – двойной. Заметим, что точка i_l является проекцией бесконечно удаленной точки прямой KB , так как является точкой пересечения картинной плоскости с проектирующим лучом, проведенным из центра проекции в эту бесконечно удаленную точку. Поэтому главную точку схода i называют точкой схода проекций прямых предметной плоскости, параллельных проекции главной вертикали, а линию действительного горизонта $h_i h_i$ – геометрическим местом точек схода проекций всех прямых предметной плоскости.

Исходя из изложенного, для построения перспективы прямой предметной плоскости необходимо выполнить следующие действия:

- найти двойную точку, продолжив прямую до пересечения с основанием картины;
- отыскать точку схода проекции прямой, проведя параллельную ей линию из центра проекции до пересечения с линией действительного горизонта;
- провести направление перспективы, соединив двойную точку с точкой схода;
- провести в концы прямой предметной плоскости проектирующие лучи, пересечение которых с направлением перспективы даст искомую проекцию.

Определение перспективы точки A , лежащей в предметной плоскости E , можно выполнить несколькими вариантами.

Например, использовать проектирующую плоскость, проходящую через центр проекции S и точку A и рассекающую плоскость E под каким-либо произвольным углом φ по отношению к проекции главной вертикали. В этом случае, на основании ранее изложенного, плоскость картины P рассеется проектирующей плоскостью по линии $l_3 i_3$. Пересечение проектирующего луча SA с линией $l_3 i_3$ определит перспективу точки A на картине.

Перспектива отвесной прямой. До сих пор рассматривались вопросы построения проекций точек и прямых, расположенных в предметной плоскости. Очевидно, проектируемые объекты могут располагаться и вне предметной плоскости, например, возвышаясь над ней.

Пусть дана отвесная прямая AA_0 (точка A_0 лежит в предметной плоскости E), и требуется построить ее проекцию (рис. 4.6).

Для этого построим проектирующую плоскость W , проведя ее через центр проекции и отвесную прямую AA_0 . В этой проектирующей плоскости размещается также отвесная линия SN , точка надира n , ее проекция N , искомая проекция aa_0 и точка схода направления ее перспективы.

Поскольку точки A_0 и N принадлежат проектирующей и предметной плоскостям, то линией их пересечения будет прямая $A_0 N$, пересекающая основание картины в точке K . Очевидно, что линия пересечения картинной и проектирующей плоскостей проходит через точку надира n и точку Коснования картины, поскольку обе они принадлежат как картинной, так и проектирующей плоскостям. Теперь для нахождения искомой проекции aa_0 ,

достаточно провести проектирующие лучи в точки A и A_0 , ограничивающие исходную отвесную линию. Их пересечение с направлением перспективы Kn даст точки a, a_0 и искомую проекцию aa_0 .

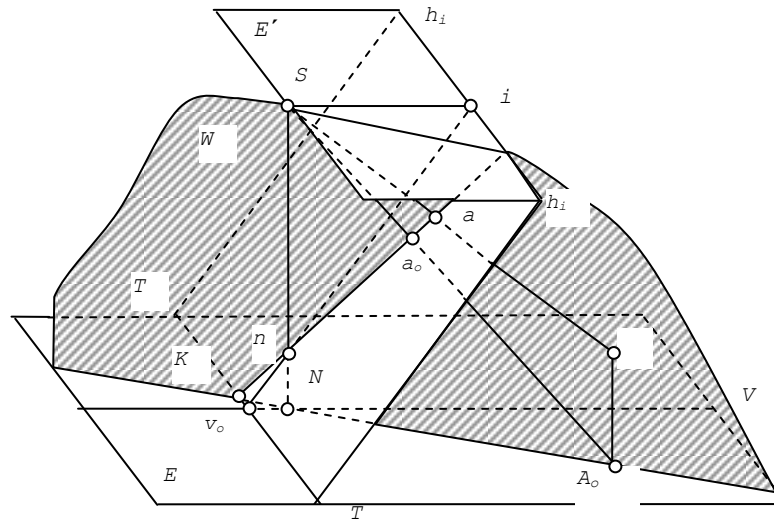


Рис. 4.6. Проекция отвесной прямой

Для определения положения точки схода перспектив отвесных линий можно провести проектирующий луч в бесконечно удаленную точку исходной прямой. Этот луч совпадет с отвесной линией SN , пересекающей с картинной плоскостью в точке надира n . Таким образом, *направления перспектив проекций всех отвесных прямых проходят через точку надира, которая является их точкой схода*. Это означает, что продолжения изображенных на аэроснимке вертикальных объектов (дымовых труб, водонапорных башен, телеграфных столбов, телевизионных мачт и др.) пересекаются в точке надира.

Вопрос 4.4 Теорема Шаля. Понятие об эпюрах

Найдем проекцию a точки A предметной плоскости (рис. 4.7) и будем вращать картинную плоскость P вокруг основания картины TT и одновременно плоскость действительного горизонта E вокруг линии действительного горизонта $h_i h_i$ вместе с построениями на них, сохраняя взаимную параллельность плоскости действительного горизонта и предметной. Вращение прекратим, как только предметная плоскость E , картинная P и плоскость действительного горизонта E' сольются в одну, точка S окажется в положении S' , точка i – в положении i' , а точка a в положении a' . По условию $Si = S'i'$ и $il = li'$.

Докажем, что проекция a точки A при вращении плоскостей своего положения не изменила.

Из подобных треугольников Sai и Aal следует:

$$lA/Si=la/ia. \quad (4.2)$$

Треугольники $S'a'i$ и $a'Al$ также подобны, и можно записать:

$$lA/S'i'=la'/i'a'. \quad (4.3)$$

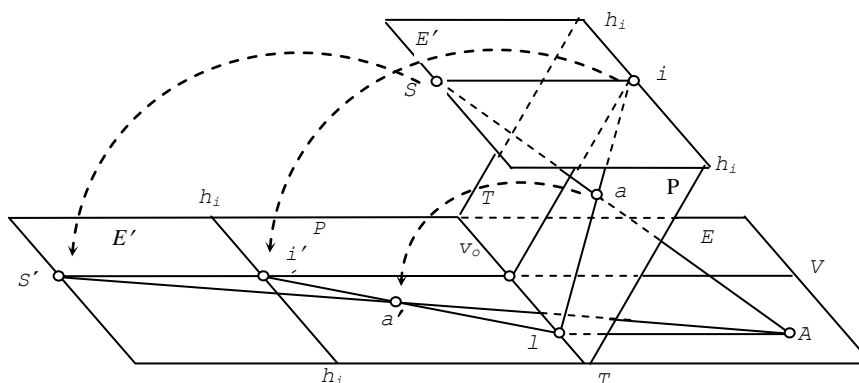


Рис. 4.7. Теорема Шаля

Так как $Si=S'i'$, приравняем левые части выражений (4.2) и (4.3)

$$la/ia=la'/i'a' \quad (4.4)$$

и составим производную пропорции

$$\frac{ia + al}{ia} = \frac{i'a' + a'l}{i'a'}. \quad (4.5)$$

Поскольку $ia+al=i'a'+a'l=il$, то и $ia=i'a'$, т. е. проекция a точки предметной плоскости A при одновременном вращении плоскостей своего положения не изменила. Этим доказана теорема, известная в специальной литературе как теорема Шаля:

Если при одновременном вращении плоскости действительного горизонта вокруг линии действительного горизонта $h_i h_i$ и предметной плоскости вокруг основания картины TT сохраняется их взаимная параллельность, то проектирующий луч SA всегда проходит через ту же пару сопряженных точек предметной (A) и картинной (a) плоскостей.

Результат не изменится при одновременном вращении любой пары плоскостей: E и E' , E и P , или P и E' , если плоскости E и E' останутся параллельными. Это обстоятельство имеет в фотограмметрии исключительно большое значение и лежит в основе всех методов обработки аэроснимков с преобразованными связками проектирующих лучей.

Совмещенное положение всех трех основных плоскостей вместе с построениями на них называется *эпюром* (от французского «*épure*» – «улучшенный»). Если эпюр получен путем увеличения угла наклона картинной плоскости до 180^0 (как на рис. 4.8), он называется эпюром

растяжения (рис. 4.8), а если уменьшением этого угла до 0° – эюром сложения (рис. 4.9).

К недостаткам эюра растяжения относится наличие острых углов в точках пересечения прямых, затрудняющих уверенное отыскание проекций, а эюра сложения – большая загруженность чертежа из-за совмещенного положения картинной и предметной плоскостей.

На эюре сложения, в силу равенства отрезков Si и ci , центр проекции S совпадает с точкой нулевых искажений c и ее проекцией C . Это означает, что углы с вершиной в проекции точки нулевых искажений C равны проекциям этих углов в картинной плоскости (с вершиной в точке нулевых искажений c).

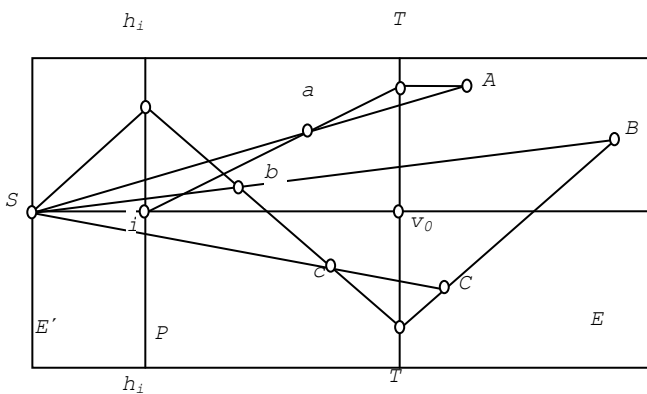


Рис. 4.8. Эюр растяжения

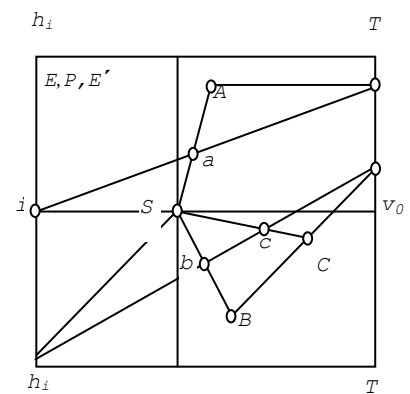


Рис. 4.9. Эюр сложения

Вопрос 4.5 Перспектива сетки квадратов на эюре

Для исследования масштаба перспективного изображения построим перспективу сетки квадратов на эюре растяжения. Стороны сетки выберем так, чтобы одна из них совпадала с основанием картины TT , а другая – с проекцией главной вертикали Vv_0 (рис. 4.10).

В этом случае точкой схода направлений перспективы прямых, параллельных проекции главной вертикали, будет главная точка схода картинной плоскости i , а направления перспективы линий сетки, параллельных основанию картины, будут также параллельны основанию картины. Для их отыскания построим проекции диагоналей сетки.

Для нахождения направлений перспектив проекций диагоналей сетки соединим точки пересечения диагоналей с основанием картины (точки k_1, \dots, k_6) с точками схода их проекций (i_1, i_2), полученными в пересечении линии действительного горизонта с прямыми, проведенных из центра проекции S параллельно диагоналям сетки.

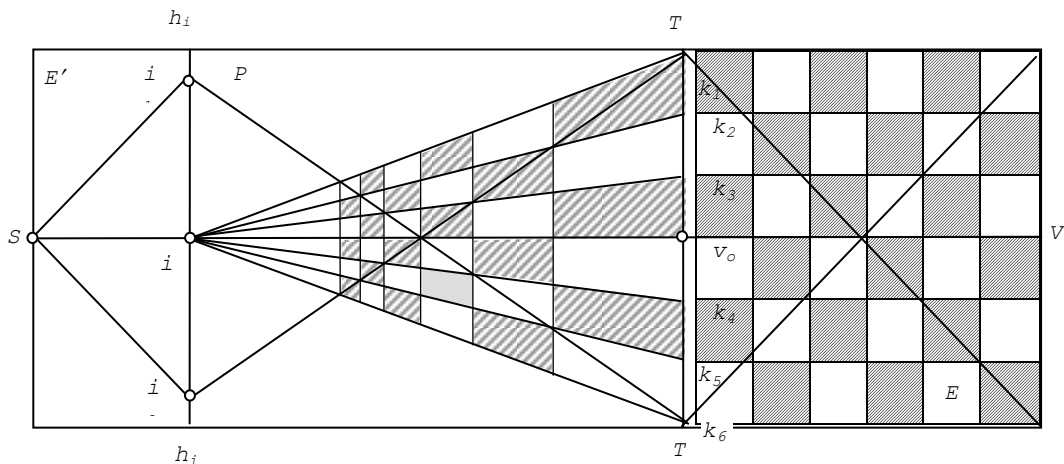


Рис. 4.10. Перспектива сетки квадратов

Для отыскания направления перспективы проекций прямых, параллельных основанию картины, соединим соответствующие точки пересечения направлений перспектив диагоналей сетки (i_1k_6, i_2k_1) и ее сторон, параллельных проекции главной вертикали ($ik_1, ik_2, ik_3, iv_0, \dots, ik_6$).

Анализ полученной перспективы позволяет сделать некоторые общие выводы об изменении масштаба изображения и наличии перспективных искажений, в частности:

1. При перемещении вдоль главной вертикали от основания картины к главной точке схода картинной плоскости линейные размеры проекций сторон сетки уменьшаются, и в точке i станут равными нулю. Следовательно, масштаб их изображения изменяется от единицы на основании картины до нуля в главной точке схода.

2. Масштаб изображения по направлениям, совпадающим с горизонталями, остается неизменным. В этом можно убедиться, рассмотрев подобные треугольники с общей вершиной в точке i .

3. Преобразование сетки квадратов предметной плоскости в сетку трапеций в картинной плоскости позволяет говорить о наличии угловых и линейных искажений.

Вопрос 4.7 Системы координат, применяемые в фотограмметрии

Применяемые в фотограмметрии координатные системы можно условно разделить на две группы, различающиеся областью применения, выбором начала координат и направлениями координатных осей.

Координатные системы местности используются для определения пространственного положения точек местности. К таким системам относятся как левые геодезические (геоцентрическая, Гаусса-Крюгера, местная и др.), так и правые фотограмметрические.

Напомним, что в левой (французской) координатной системе последовательное преобразование осей $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X$ выполняется путем вра-

щения их по часовой стрелке; в правой (английской) системе тот же результат достигается при вращении против часовой стрелки.

Геоцентрическая система координат $OXYZ$ (рис. 4.11) используется при решении фотограмметрических задач на большие расстояния, при выполнении космических исследований и т. п. Ее начало совпадает с центром земных масс, плоскость OXY располагается в плоскости экватора, ось OZ совмещена с полярной осью планеты, ось OX установлена в плоскости начального меридиана, а ось OY дополняет систему до левой. Положение точки земной поверхности A в этой системе определяется прямоугольными координатами X, Y, Z , значения которых зависят от параметров эллипсоида.

Система координат Гаусса-Крюгера $O_2X_2Y_2Z_2$ (рис. 4.12) используется для представления результатов фотограмметрической обработки материалов аэрофотосъемки и положения необходимых для этого опорных точек. Система относится к топоцентрическим: ее начало O_2 совмещено с точкой пересечения осевого меридиана и экватора, ось O_2X_2 – осевым меридианом, ось O_2Z_2 направлена по нормали к эллипсоиду, а ось O_2Y_2 дополняет систему до левой.

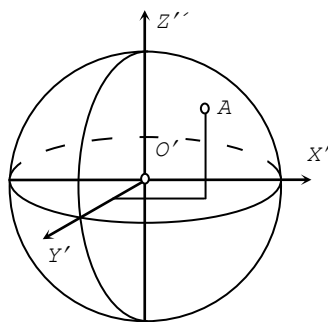


Рис. 4.11. Геоцентрическая система координат

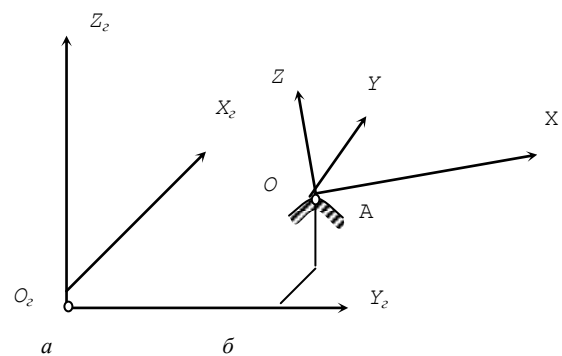


Рис. 4.12. Геодезическая (а) и фотограмметрическая (б) системы координат

Начало *местной системы координат* совмещается с произвольной точкой O_m , а оси O_mX_m, O_mY_m и O_mZ_m параллельны соответствующим осям системы координат Гаусса-Крюгера. Положение точек в этой системе определяется пространственными координатами X_m, Y_m и Z_m .

Фотограмметрическая система координат $OXYZ$ (рис. 4.12) может выбираться произвольно, так, чтобы зависимости между координатами соответственных точек снимка и местности имели наиболее простой вид. Ее начало совмещается с произвольной точкой (например, с точкой местности или с центром проекции), а координатные оси выбираются так, чтобы система оставалась прямоугольной и правой. Чаще всего ось OX совмещают с направлением маршрута. Положение точек в фотограмметрической системе определяется координатами X, Y и Z .

Координатные системы аэроснимка предназначены для определения положения точек аэроснимков, являются прямоугольными, правыми и

делятся на внутренние и внешние. Внешние координатные системы являются пространственными, а их начало совмещено с центром проектирования. Внутренние системы – плоские, с началом в точке пересечения линий, соединяющих координатные метки снимка.

Плоская прямоугольная координатная система oxy относится к внутренним и используется для определения положения точек аэроснимка (рис. 4.13, а, б). Ее начало совмещено с точкой пересечения линий 1–2 и 3–4, соединяющих противоположные координатные метки, ось ox – с линией 1–2 (рис. 4.13, а) или параллельно ей (рис. 4.13, б), а ось oy становится перпендикулярно оси x . Положение точки m аэроснимка определяется координатами x_m, y_m .

Иногда ось ox совмещается с главной вертикалью, а ось oy – с горизонталью, проходящей через главную точку снимка, точку нулевых искажений или точку надира.

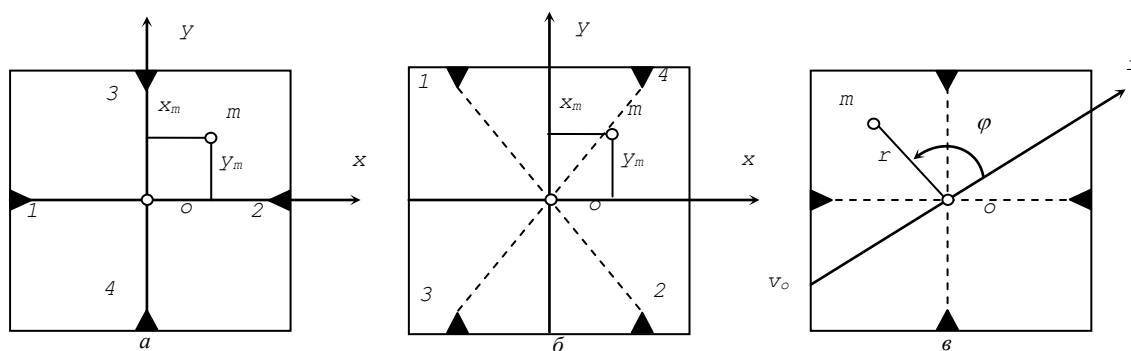


Рис. 4.13. Внутренние координатные системы аэроснимка

Если главная точка аэроснимка не совпадает с точкой пересечения координатных меток, то координаты произвольной точки аэроснимка

$$x_m = x - x_o, y_m = y - y_o, \tag{4.6}$$

где x, y – измеренные координаты точки аэроснимка, а x_o, y_o – координаты главной точки аэроснимка.

Полярная система координат $o\varphi$ (рис. 4.13, в) относится также к внутренним, применяется при анализе изображения на аэроснимке и реализуется в конструкциях ряда фотограмметрических приборов. Ее начало совпадает с точкой пересечения линий, соединяющих противоположные координатные метки, полярная ось – с главной вертикалью iv_o , а ее положительное направление размещено в правой части снимка. Полярный угол φ отсчитывается от положительного направления главной вертикали против часовой стрелки.

Промежуточная система координат $Sxyz$ (рис. 4.14) относится к внешним пространственным и используется для теоретических исследований. Ее начало размещено в центре проекции S , ось Sz совмещена с главным

оптическим лучом, а оси Sx и Sy параллельны соответствующим осям системы координат аэроснимка oxy (рис. 4.14). В этой системе координатами точки аэроснимка t являются величины x_m , y_m , и $z_m = -f$.

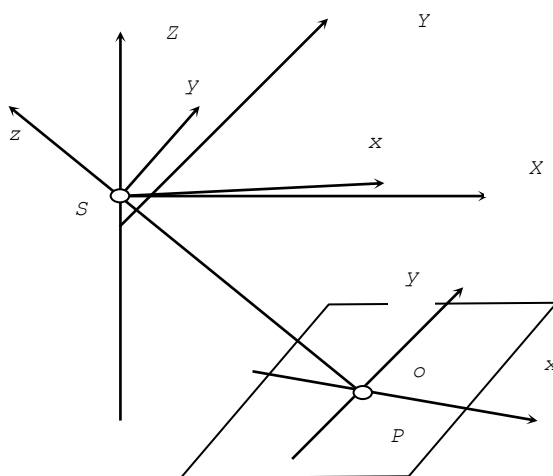


Рис.4.14. Промежуточная система координат

К внешним относится также промежуточная система координат $SXYZ$ (рис. 4.14), оси которой параллельны соответствующим осям фотографической системы координат $OXYZ$ (рис. 4.14).

Вопрос 4.8 Элементы внутреннего и внешнего ориентирования снимка

Элементы ориентирования разделяются на две группы – элементы внутреннего ориентирования и элементы внешнего ориентирования.

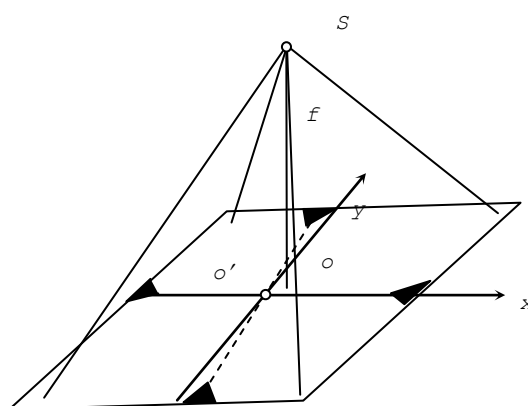


Рис. 4.15. Элементы внутреннего ориентирования снимка

Элементами внутреннего ориентирования называют величины, определяющие положение центра проекции относительно плоскости аэроснимка. К ним относят три величины (рис. 4.15): фокусное расстояние f и

координаты главной точки x_0, y_0 аэроснимка в системе oxy . Эти элементы определяют в процессе калибровки съёмочной камеры и заносят в ее технический паспорт.

По элементам внутреннего ориентирования аэроснимка можно восстановить связку лучей, существовавших во время съёмки: для этого нужно по координатным меткам и элементам x_0, y_0, f найти положение центра проекции. После этого установить в полученный центр проекции источник света и спроектировать изображение снимка на какой-либо экран (иными словами – соединить центр прямыми линиями с точками аэроснимка, обозначив тем самым проектирующие лучи).

Элементами внешнего ориентирования называют величины, определяющие положение аэроснимка в момент съёмки относительно системы координат местности. В фотограмметрии используются две таких системы, различающиеся системами отсчета.

Первая система элементов внешнего ориентирования представлена на рис. 4.16, где показана плоская прямоугольная система координат снимка oxy и две промежуточные системы: $SXYZ$ и $Sxyz$. Их координатные оси параллельны осям фотограмметрической системы $OXYZ$ и плоской прямоугольной системы снимка oxy соответственно. Элементами внешнего ориентирования в этой системе являются шесть величин – три линейных и три угловых, причем два угловых элемента связаны с плоскостью, проходящей через главную оптическую ось So и ось Sy промежуточной системы $SXYZ$:

X_S, Y_S, Z_S – координаты центра проекции в системе $OXYZ$;

α – продольный угол наклона в плоскости SXZ между осью SZ и проекцией главного оптического луча So на плоскость SXZ ;

ω – поперечный угол наклона в плоскости SoY между главным оптическим лучом So и его проекцией на плоскость SXZ ;

χ – угол поворота в плоскости снимка между осью y и следом сечения плоскости SoY .

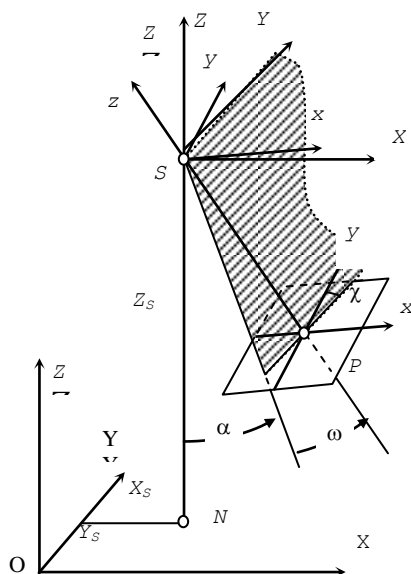


Рис.4.16. Элементы внешнего ориентирования снимка
 $X_S, Y_S, Z_S, \alpha, \omega, \chi$

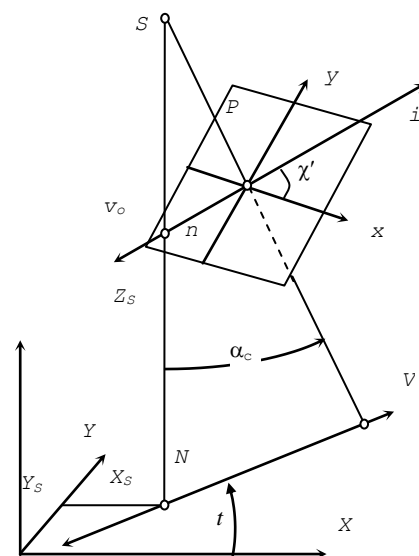


Рис. 4.17. Элементы внешнего ориентирования снимка
 $X_S, Y_S, Z_S, \alpha_c, t, \chi'$

Система находит широкое применение в научных исследованиях, при аналитической и цифровой обработке аэроснимков, в конструкциях фотограмметрических приборов. Сравнительно небольшие значения углов α и ω допускают применение дифференциальных формул связи координат точек снимка местности.

Вторая система элементов внешнего ориентирования предполагает определение пространственного положения аэроснимка также шестью элементами (рис. 4.17), в том числе тремя линейными и тремя угловыми. К линейным элементам относятся прямоугольные координаты X_S, Y_S, Z_S центра проекции S , а к угловым – три угла:

α_c – суммарный угол наклона, отсчитываемый в плоскости главного вертикала между осью SZ и главным оптическим лучом So ;

t – дирекционный угол оптической оси съёмочной камеры, отсчитываемый в плоскости OXY между осью X и проекцией главной вертикали;

χ' – угол поворота снимка, отсчитываемый в плоскости снимка между осью x и главной вертикалью

Преобразования координатных систем. Из аналитической геометрии известно, что ортогональное преобразование пространственных координатной системы $OXYZ$ или $Oxyz$ с совмещенными началами в общем случае описывается через исходные, преобразованные координаты и углы между соответствующими координатными осями до и после преобразования, причем для прямого и обратного преобразования используют формулы:

$$\left. \begin{aligned} X &= a_1x + a_2y + a_3z, & x &= a_1X + b_1Y + c_1Z \\ Y &= b_1x + b_2y + b_3z, & y &= a_2X + b_2Y + c_2Z \\ Z &= c_1x + c_2y + c_3z, & z &= a_3X + b_3Y + c_3Z \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

где a_i, b_i, c_i ($i=1,2,3$) – косинусы углов, составленных координатными осями X, Y, Z системы $OXYZ$ с координатными осями x, y, z системы $Oxyz$

Величины a_i, b_i, c_i называют направляющими косинусами, или компонентами матрицы ортогонального преобразования.

Три параметра, от которых зависят значения направляющих косинусов, называют углами Эйлера, которые в фотограмметрии отождествляют с угловыми элементами внешнего ориентирования. Выбор углов Эйлера осуществляется различными способами, и от того, как это сделано, зависит вид функции для определения направляющих косинусов.

Девять направляющих косинусов определяются через три независимых угла, следовательно, они должны быть связаны шестью независимыми условиями. Таковыми являются:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 &= 0 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1, & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

Из этих свойств вытекают и другие, в частности, следующие:

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \quad a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

Уравнения (4.7) могут быть представлены в матричной форме

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_{\alpha\omega\chi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A_{\alpha\omega\chi}^T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

или в векторной

$$R = A_{\alpha\omega\chi} \times r, \quad r = A_{\alpha\omega\chi}^T \times R, \quad (4.11)$$

где R, r – векторы с компонентами, представленными в координатных системах $OXYZ$ и $Oxyz$ соответственно; $A_{\alpha\omega\chi}, A_{\alpha\omega\chi}^T$ – прямая и транспонированная матрицы ортогонального преобразования, причем

$$A_{\alpha\omega\chi} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A_{\alpha\omega\chi}^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

Имея в виду связь промежуточных координатных систем $SXYZ$ и $Sxyz$, когда для всех точек аэроснимка $z = -f$, вместо (4.7) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} X = a_1 x + a_2 y - a_3 f, \quad x = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ Y = b_1 x + b_2 y - b_3 f, \quad y = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ Z = c_1 x + c_2 y - c_3 f, \quad z = -f = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{aligned} \right\}. \quad (4.13)$$

Если координаты главной точки аэроснимка не равны нулю, то в формулах (4.7) – (4.12) величины x и y заменяют на $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$.

Определение направляющих косинусов. Для определения направляющих косинусов воспользуемся известными из аналитической геометрии формулами связи исходных (x, y) и преобразованных (x', y') координат точек при повороте координатных осей на угол φ , отсчитываемый против часовой стрелки:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}, \quad (4.14)$$

и

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Для определения направляющих косинусов выполним преобразование координатной системы $Sxyz$ в систему $SXYZ$ (или $SXYZ$ в систему $Sxyz$) путем трех последовательных поворотов вокруг координатных осей, каждый из которых описывается формулами (4.12) или (4.13), и найдем произведение соответствующих этим поворотам матриц. При этом будем использовать угловые элементы внешнего ориентирования α , ω и χ .

Из трех углов, связывающих системы $Sxyz$ и $SXYZ$, один (χ) лежит в плоскости Sxy , другой (α) – в плоскости SXZ , а третий угол (ω) – в плоскости SoY , не являющейся координатной ни в системе $Sxyz$, ни в системе $SXYZ$. С учетом этого и принимая во внимание направления отсчета угловых элементов внешнего ориентирования, для определения направляющих косинусов имеется две возможности:

1. Преобразовать систему $SXYZ$ в систему $Sxyz$ в результате трех последовательных поворотов ее координатных осей на углы α , ω и χ , формируя матрицу ортогонального преобразования на основе зависимостей (4.12).

2. Преобразовать систему $Sxyz$ в систему $SXYZ$ в результате трех последовательных поворотов ее координатных осей на углы χ , ω , α , формируя матрицу ортогонального преобразования на основе зависимостей (4.12).

Оба пути равноценны и ведут к одинаковым результатам. Выберем второй вариант и выполним три последовательных поворота (рис. 4.18).

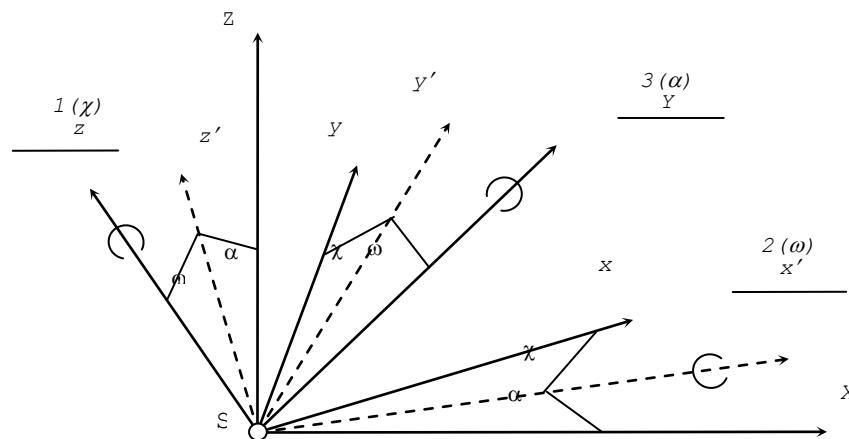


Рис.4.18. Преобразование координатных систем

1. Первый поворот системы $Sxyz$ на угол $-\chi$ вокруг оси Sz преобразует ее в систему $Sx'y'z'$ (рис. 4.18). Матрица ортогонального преобразования

$$A_\chi = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

2. Второй поворот системы $Sx'y'z'$ на угол $-\omega$ вокруг оси Sx' преобразует ее в $Sx'Yz'$ (рис. 4.18). При этом оси Sx' и Sz' окажутся лежащими в плоскости SXZ , а матрица ортогонального преобразования будет иметь вид:

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

3. Третий поворот системы $Sx'Yz'$ вокруг оси SY на угол $-\alpha$ преобразует ее в систему $SXYZ$ (рис. 4.18). Матрица ортогонального преобразования будет иметь вид:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Матрица преобразования, соответствующая суммарному повороту, определяется как произведение трех матриц: $A_{\alpha\omega\chi} = A_\alpha A_\omega A_\chi$.

Перемножить две матрицы – значит составить новую, каждый элемент которой равен сумме произведений соответствующих элементов строк первой матрицы на элементы столбцов второй. Таким образом:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\omega\chi} &= A_\alpha A_\omega A_\chi = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \omega & -\sin \alpha \cos \omega \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \alpha & \cos \alpha \sin \omega & \cos \alpha \cos \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \chi - \sin \alpha \sin \omega \sin \chi & \cos \omega \sin \chi & \sin \alpha \cos \chi + \cos \alpha \sin \omega \sin \chi \\ -\cos \alpha \sin \chi - \sin \alpha \sin \omega \cos \chi & \cos \omega \cos \chi & -\sin \alpha \sin \chi + \cos \alpha \sin \omega \cos \chi \\ -\sin \alpha \cos \omega & -\sin \omega & \cos \alpha \cos \omega \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Сопоставив полученное выражение с (4.9), получим следующие формулы определения направляющих косинусов по угловым элементам внешнего ориентирования α , ω и χ :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos\alpha \cos\chi - \sin\alpha \sin\omega \sin\chi, & b_1 &= \cos\omega \sin\chi, \\ a_2 &= -\cos\alpha \sin\chi - \sin\alpha \sin\omega \cos\chi, & b_2 &= \cos\omega \cos\chi, \\ a_3 &= -\sin\alpha \cos\omega, & b_3 &= -\sin\omega, \\ c_1 &= \sin\alpha \cos\chi + \cos\alpha \sin\omega \sin\chi, \\ c_2 &= -\sin\alpha \sin\chi + \cos\alpha \sin\omega \cos\chi, \\ c_3 &= \cos\alpha \cos\omega. \end{aligned} \right\}. \quad (4.20)$$

Для связи направляющих косинусов с угловыми элементами внешнего ориентирования второй системы α_c и χ' выполним три последовательных поворота системы $SXYZ$: вокруг оси SZ на угол t в положение $Sx'y'z'$;

вокруг оси Sy' на угол α_c в положение $Sx''y'z''$;

вокруг оси Sz'' на угол χ' в положение $Sxyz$. Перемножив соответствующие матрицы ортогонального преобразования, получим

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos t \cos\alpha_c \cos\chi' - \sin t \sin\chi', & c_1 &= \sin\alpha_c \cos\chi', \\ a_2 &= -\cos t \cos\alpha_c \sin\chi' - \sin t \cos\chi', & c_2 &= -\sin\alpha_c \sin\chi', \\ a_3 &= -\cos t \sin\alpha_c, & c_3 &= \cos\alpha_c. \\ b_1 &= \sin t \cos\alpha_c \cos\chi' + \cos t \sin\chi', \\ b_2 &= -\sin t \cos\alpha_c \sin\chi' + \cos t \cos\chi', \\ b_3 &= -\sin t \sin\alpha_c, \end{aligned} \right\}. \quad (4.21)$$

Если известны направляющие косинусы, то угловые элементы внешнего ориентирования в первой и второй системах можно определить по следующим формулам, вытекающим из (4.14) и (4.15):

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{a_3}{c_3}\right), \quad \omega = \operatorname{arcsin}(-b_3), \quad \chi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_1}{b_2}\right). \quad (4.22)$$

$$t = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_3}{a_3}\right), \quad \alpha_c = \operatorname{arccos}(c_3), \quad \chi' = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_2}{c_1}\right). \quad (4.23)$$

Знак суммарного угла наклона α_c второй системы условимся считать соответствующим знаку продольного угла наклона элементов внешней ориентирования.

Вопрос 4.9 Связь координат соответствующих точек наклонного снимка и местности

Пусть из точки S получен аэроснимок P (рис. 4.19), на котором имеется изображение m точки местности M . Требуется установить зависимость между координатами точек m и M , полагая элементы внешнего ориентирования аэроснимка известными.

Пусть из точки S получен аэроснимок P (рис. 4.19), на котором имеется изображение m точки местности M . Требуется установить зависимость между координатами точек m и M , полагая элементы внешнего ориентирования аэроснимка известными.

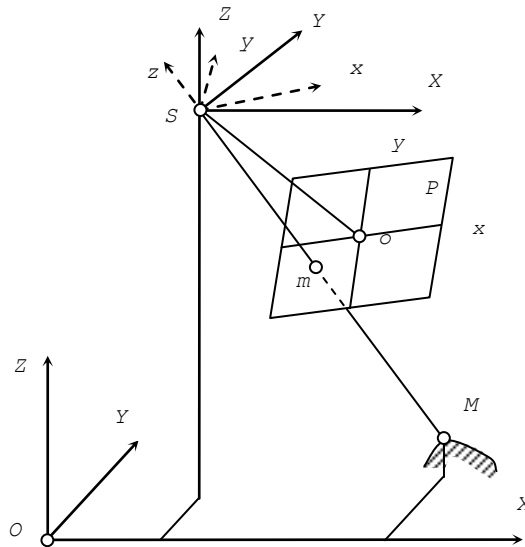


Рис. 4.19. Связь координат точек аэроснимка и местности

Так как точки S , m и M принадлежат одному проектирующему лучу, то для вывода искомой зависимости воспользуемся уравнением прямой, проходящей через три произвольные точки 1, 2 и 3:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad (4.24)$$

Пусть точкам 1, 2 и 3 соответствуют точки S , M и m . Подставляя их координаты в системе $SXYZ$ в уравнение прямой, получим:

$$\frac{X_m - X_s}{X_M - X_s} = \frac{Y_m - Y_s}{Y_M - Y_s} = \frac{Z_m - Z_s}{Z_M - Z_s},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} X_M - X_s &= (Z_M - Z_s) \frac{X_m - X_s}{Z_m - Z_s} \\ Y_M - Y_s &= (Z_M - Z_s) \frac{Y_m - Y_s}{Z_m - Z_s} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Подставив в эти выражения значения пространственных координат точки снимка, получим

$$\left. \begin{aligned} X_M - X_S &= (Z_M - Z_S) \frac{X_m}{Z_m} = (Z_M - Z_S) \frac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \\ Y_M - Y_S &= (Z_M - Z_S) \frac{Y_m}{Z_m} = (Z_M - Z_S) \frac{b_1 x + b_2 y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \end{aligned} \right\}. \quad (4.26)$$

Полученные формулы позволяют определить координаты точки местности по координатам ее изображения на аэроснимке в случае, если известна высота точки Z_M . Таким образом, для определения пространственных координат точки данных одного аэроснимка, т. е. двух измерений координат изображения, недостаточно.

Для решения обратной задачи, т. е. определения координат точки аэроснимка по ее координатам на местности и элементам внешнего ориентирования воспользуемся уравнением прямой, подставляя в нее координаты точек S , M и m в системе $Sxyz$ вместо координат точек 1, 2 и 3 уравнения прямой:

$$\frac{x_m}{x_M} = \frac{y_m}{y_M} = \frac{-f}{z_M} \text{ или } x_m = -f \frac{x_M}{z_M}, \quad y_m = -f \frac{y_M}{z_M}.$$

Так как координатные оси систем $SXYZ$ и $OXYZ$ параллельны, приращения $X_M - X_S$, $Y_M - Y_S$ и $Z_M - Z_S$ координат точки M относительно центра фотографирования можно рассматривать как ее координаты в системе $SXYZ$, переход от которых к координатам той же точки в системе $Sxyz$ описывается зависимостями (4.10). Следовательно

$$\left. \begin{aligned} x &= -f \frac{a_1(X_M - X_S) + b_1(Y_M - Y_S) + c_1(Z_M - Z_S)}{a_3(X_M - X_S) + b_3(Y_M - Y_S) + c_3(Z_M - Z_S)} \\ y &= -f \frac{a_2(X_M - X_S) + b_2(Y_M - Y_S) + c_2(Z_M - Z_S)}{a_3(X_M - X_S) + b_3(Y_M - Y_S) + c_3(Z_M - Z_S)} \end{aligned} \right\}. \quad (4.27)$$

Таким образом, по трем измерениям (пространственным координатам точки местности) определены два неизвестных; третье измерение неявно использовано для определения масштаба изображения.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. *Снимок горизонтальный.* Подставляя в (4.14) и (4.15) углы $\alpha = \omega = \chi = 0$ (или $\alpha_c = t = \chi' = 0$), получим, что $a_1 = b_2 = c_3 = 1$, а остальные (a_2, a_3, \dots, c_2) равны нулю. Совместим начало координат $OXYZ$ с проекцией точки надира ($X_S = Y_S = Z_S = 0$), примем $Z_M = 0$ (точки в плоскости OXY) и подставим эти значения в (4.22) и (4.23), получим

$$X = x^0 \frac{H}{f} = x^0 m, \quad Y = y^0 \frac{H}{f} = y^0 m, \quad (4.28)$$

$$x^0 = X \frac{f}{H} = \frac{X}{m}, \quad y^0 = Y \frac{f}{H} = \frac{Y}{m}, \quad (4.29)$$

где x^o, y^o – координаты точки на горизонтальном снимке;
 H – высота фотографирования над определяемой точкой.

Использование полученных формул ограничивается сделанным выше допущением, что все точки местности размещены в горизонтальной плоскости ($Z_M=0$). Допускаемая при этом относительная погрешность вычислений будем пропорциональна относительной ошибке определения высоты фотографирования (т. е. отношению реального превышения точки над плоскостью OXY к высоте фотографирования), что ограничивает область применения полученных формул.

2. *Снимок наклонный*. Выберем координатные системы снимка (oxy) и местности ($OXYZ$) так, чтобы оси ox и OX совместились с главной вертикалью и ее проекцией соответственно ($t=\chi'=0$). Тогда направляющие косинусы будут зависеть только от суммарного угла наклона α_c , и вместо формул (4.15) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \cos \alpha_c, & b_1 &= 0, & c_1 &= \sin \alpha_c \\ a_2 &= 0, & b_2 &= 1, & c_2 &= 0 \\ a_3 &= -\sin \alpha_c, & b_3 &= 0, & c_3 &= \cos \alpha_c \end{aligned} \right\}. \quad (4.30)$$

Примем с целью упрощения выводов, что местность равнинная ($Z_S=Z_M=-H$), а начало координат системы $OXYZ$ совмещено с точкой надира N ($X_S=Y_S=0$). Подстановка (4.28) в (4.23) при $X_S=Y_S=0$ и $Z_S=H$ приводит к следующим формулам связи координат:

$$\left. \begin{aligned} X &= H \frac{x \cos \alpha_c + f \sin \alpha_c}{f \cos \alpha_c - x \sin \alpha_c} \\ Y &= H \frac{y}{f \cos \alpha_c - x \sin \alpha_c} \end{aligned} \right\}. \quad (4.31)$$

Выбирая те или иные системы координат аэроснимка и местности (например, с началами в главной точке снимка и ее проекции, в точке нулевых искажений и ее проекции) или определяя положение координатных плоскостей, можно получить различные зависимости между координатами точек снимка и местности, сфера применения которых будет ограничена решением соответствующих локальных задач.

Вопрос 4.10 Зависимость между координатами точек наклонного и горизонтального снимков

Фотограмметрические задачи наиболее просто решаются по горизонтальным снимкам. Получить такой снимок при нынешнем состоянии средств аэрофотосъемки невозможно, да в этом нет и необходимости, поскольку при известных угловых элементах внешнего ориентирования измеренные на наклонном снимке координаты можно перевычислить на строго горизонтальный снимок. Этот процесс в фотограмметрии называется трансформированием координат.

Пусть из точки S (рис. 4.29) получены горизонтальный P^o и наклонный P снимки с изображениями m и m^o точки местности M . Эти снимки пересекаются по линии неискаженных масштабов, и их фокусные расстояния одинаковы ($So=S_o^o=f$). Точка m^o горизонтального снимка имеет координаты x^o , y^o , а точка m наклонного снимка – координаты x и y .

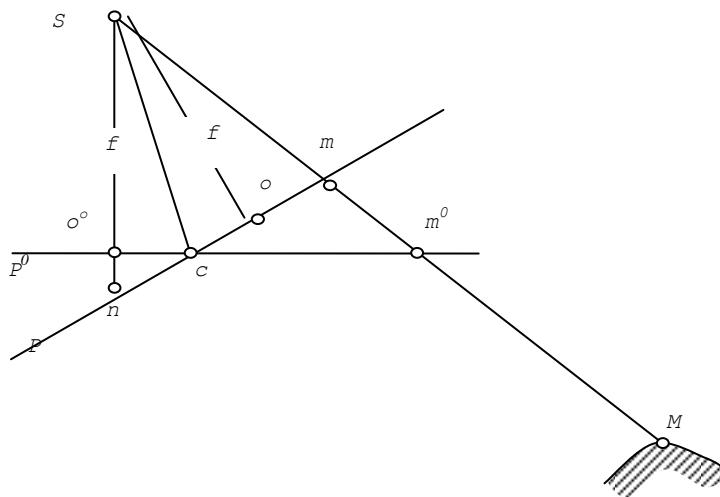


Рис. 4.20. Схема зависимости координат точек наклонного и горизонтального снимков

Рассматривая горизонтальный снимок P^o вместе с расположенными на нем точками как плоскую местность, для установления связи между координатами соответственных точек плоскостей P и P^o воспользуемся формулами (4.23), полагая отметки Z_M всех точек одинаковыми и равными нулю (местность равнинная), $X_S=Y_S=0$ и $Z_S=f$. Тогда формулы связи координат точек снимков P и P^o примут вид:

$$\left. \begin{aligned} x^o &= -f \frac{X}{Z} = -f \frac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \\ y^o &= -f \frac{Y}{Z} = -f \frac{b_1 x + b_2 y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f} \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Полученные формулы позволяют преобразовать координаты точек наклонного снимка к горизонтальному случаю съемки с полным устранением перспективных искажений при любых значениях угловых элементов внешнего ориентирования.

Действуя аналогично, можно получить и обратные зависимости, выполнив преобразование формул (4.26). Полагая координаты главной точки x_o и y_o равными нулю, найдем:

$$\left. \begin{aligned} x &= -f \frac{a_1 x^0 + b_1 y^0 - c_1 f}{a_3 x^0 + b_3 y^0 - c_3 f} \\ y &= -f \frac{a_2 x^0 + b_2 y^0 - c_2 f}{a_3 x^0 + b_3 y^0 - c_3 f} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (4.33)$$

Точка надира наклонного снимка лежит на том же проектирующем луче, что и главная точка горизонтального снимка (рис. 4.31), и для определения ее координат на наклонном снимке достаточно в формулы (4.22) подставить $x_n^0 = y_n^0 = 0$:

$$x_n = -f \frac{c_1}{c_3}, \quad y_n = -f \frac{c_2}{c_3}. \quad (4.34)$$

Несложные преобразования приводят к следующим формулам для вычисления на наклонном снимке координат точки нулевых искажений:

$$x_c = -f \frac{c_1}{1 + c_3}, \quad y_c = -f \frac{c_2}{1 + c_3}. \quad (4.35)$$

Вопрос 4.11 Масштаб изображения на аэрофотоснимке

Ранее было установлено, что масштаб горизонтального снимка равнинной местности постоянен и определяется отношением фокусного расстояния съемочной камеры к высоте фотографирования. Наклонный снимок содержит перспективные искажения, и его масштаб уже не будет постоянным (рис. 4.21).

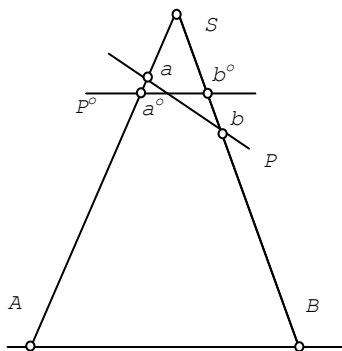
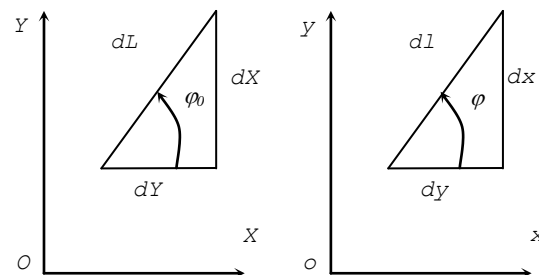


Рис. 4.21. Масштаб наклонного и горизонтального снимков



а
б
Рис. 4.22. Бесконечно малые отрезки на местности (а) и на снимке (б)

В частности, из рис. 4.21 следует, что для снимка P^0 :

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} = \frac{a^0 b^0}{AB}; \quad (4.36)$$

для снимка P :

$$\frac{1}{m} \neq \frac{f}{H} \neq \frac{ab}{AB}. \quad (4.37)$$

В частности, из рис. 4.21 следует, что для снимка P^0 :

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} = \frac{a^0 b^0}{AB}; \quad (4.38)$$

для снимка P :

$$\frac{1}{m} \neq \frac{f}{H} \neq \frac{ab}{AB}. \quad (4.39)$$

Следовательно, масштаб изображения следует определять как отношение бесконечно малых отрезков наклонного снимка и местности:

$$\frac{1}{m} = \frac{dl}{dL}, \quad (4.40)$$

где dl и dL – бесконечно малые отрезки снимка и местности, связанные с бесконечно малыми приращениями координат ограничивающих их точек следующими зависимостями (рис. 4.22):

$$\left. \begin{aligned} dL &= \sqrt{dX^2 + dY^2} \\ dy &= dx \times \operatorname{tg} \varphi \\ dl &= dx / \cos \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (4.41)$$

Для вывода формулы, определяющей масштаб наклонного снимка по произвольному направлению, воспользуемся формулами связи координат точек снимка и местности (4.29), при выводе которых координатные оси ox и Ox совмещались с главной вертикалью и ее проекцией, и выполним их дифференцирование по переменным dx и dy :

$$\begin{aligned} dX &= H \frac{(f \cos \alpha_c - x \sin \alpha_c) \cos \alpha_c dx - (x \cos \alpha_c + f \sin \alpha_c)(-\sin \alpha_c) dx}{(f \cos \alpha_c - x \sin \alpha_c)^2}, \\ dY &= H \frac{(f \cos \alpha_c - x \sin \alpha_c) dy - y(-\sin \alpha_c) dx}{(f \cos \alpha_c - x \sin \alpha_c)^2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

После несложных преобразований с учетом выражения (4.33):

$$dX = \frac{H dx}{fk^2}, \quad dY = \frac{H(k \operatorname{tg} \varphi + c) dx}{fk^2}, \quad (4.43)$$

где

$$k = (\cos \alpha_c - \frac{x}{f} \sin \alpha_c), \quad c = \frac{y}{f} \sin \alpha_c. \quad (4.44)$$

Подстановка (4.34) в (4.24) дает

$$dL = \frac{Hdx}{fk^2} \sqrt{1 + (ktg\varphi + c)^2}, \quad (4.45)$$

и формула (4.23) масштаба снимка в точке с координатами x , y по произвольному направлению с учетом (4.33) примет вид

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H} \frac{k^2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (k \sin \varphi + c \cos \varphi)^2}}. \quad (4.46)$$

Выполним анализ формулы (4.42), получив формулы масштаба в основных точках снимка по главной вертикали и по горизонталям.

1. *Снимок горизонтальный* ($\alpha_c = 0$). Подстановка α_c в (4.39) дает $k=1$, $c=0$, и вместо (4.42) будем иметь

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H}. \quad (4.47)$$

Следовательно, масштаб горизонтального снимка плоской местности – величина постоянная, не зависящая от положения точки.

2. *Масштаб по главной вертикали* ($y = 0, \varphi = 0$). Подстановка в (4.42) дает $k = \cos \alpha_c$ и $c=0$. Тогда формула масштаба по главной вертикали

$$\frac{1}{m_{VV}} = \frac{f}{H} k^2 = \frac{f}{H} (\cos \alpha_c - \frac{x}{f} \sin \alpha_c)^2. \quad (4.48)$$

3. *Масштаб по горизонталям* ($\varphi = 90^\circ$). Подкоренное выражение в знаменателе формулы (4.42) равно k , и искомый масштаб

$$\frac{1}{m_{hh}} = \frac{f}{H} k = \frac{f}{H} (\cos \alpha_c - \frac{x}{f} \sin \alpha_c). \quad (4.32)$$

Как видно, масштаб по любой горизонтали является величиной постоянной, что и подтверждает перспектива сетки квадратов.

Действуя аналогично, можно получить формулы для расчета масштаба по главной вертикали и горизонталям в основных точках.

Масштаб в точке нулевых искажений. Подставив в (4.42) $y=0$, $oc=x=-f(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$, $k=1$, $c=0$, получим

$$\frac{1}{m_{VV}} = \frac{1}{m_{hh}} = \frac{f}{H}. \quad (4.49)$$

Масштаб в точке надир (x = -f tg α, k = 1/cos α, c = 0):

$$\frac{1}{m_{VV}} = \frac{f}{H \cos^2 \alpha_c}, \quad \frac{1}{m_{hh}} = \frac{f}{H \cos \alpha_c}. \quad (4.50)$$

Масштаб в главной точке снимка (x = 0, k = cos α, c = 0):

$$\frac{1}{m_{VV}} = \frac{f}{H} \cos^2 \alpha_c, \quad \frac{1}{m_{hh}} = \frac{f}{H} \cos \alpha_c. \quad (4.51)$$

4. Изменение масштаба в пределах аэроснимка можно получить, определив разность масштабов по главной вертикали в двух симметрично расположенных точках с абсциссами +x и -x:

$$\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} = \frac{f}{H} \left[\left(\cos \alpha_c + \frac{x}{f} \sin \alpha_c \right)^2 - \left(\cos \alpha_c - \frac{x}{f} \sin \alpha_c \right)^2 \right].$$

После несложных преобразований, полагая, с достаточной для приближенных оценок точностью, что средний масштаб аэроснимка определяется по формуле (4.48):

$$\frac{\Delta m}{m} = 4 \frac{x \alpha'_c}{f \rho'}. \quad (4.52)$$

Расчеты по этой формуле показывают, что при x = f и α_c = 30' относительное изменение масштаба составит около 1/30. С такой же точностью будут определены и длины измеренных на снимке линий. Следовательно, выполнять измерения по контактному аэроснимку с использованием их среднего масштаба нужно весьма осторожно.

Вопрос 4.12 Главный, средний и частный масштабы аэрофотоснимка

Главный масштаб аэрофотоснимка вычисляют по формуле

$$\frac{1}{m} = \frac{f}{H}, \quad (4.53)$$

где H – высота фотографирования над средней плоскостью.

Для определения среднего масштаба планового аэрофотоснимка с относительно ровным рельефом необходимо измерить длины первоначально выбранных отрезков (базисов) AB и DF на снимке и фотоплане.

Для каждого из отрезков вычисляют масштаб по формуле

$$\frac{l}{m} = \frac{l}{L \times M}, \quad (4.54)$$

где m – знаменатель масштаба;

l – длина отрезка, измеренная по аэрофотоснимку, мм;

L – длина отрезка, измеренная по фотоплану, мм;

M – знаменатель масштаба фотоплана.

Из формулы (4.54) знаменатель масштаба для каждого из базисов равен:

$$m_{AB} = \frac{L_{AB} \times M}{l_{AB}}; \quad m_{DF} = \frac{L_{DF} \times M}{l_{DF}}. \quad (4.55)$$

Средний масштаб аэрофотоснимка вычисляют как среднее из масштабов по базисам AB и DF :

$$m_{cp} = \frac{m_{AB} + m_{DF}}{2}. \quad (4.56)$$

Выполним оценку точности определения среднего масштаба аэрофотоснимка, вычислив расхождение масштабов аэрофотоснимка, полученного по двум базисам:

$$\Delta m = |m_{AB} - m_{DF}|. \quad (4.57)$$

А так же, найдем относительную погрешность определения среднего масштаба как отношение Δm к m_{cp} .

Относительная погрешность измерения длин линий по аэрофотоснимку и относительная погрешность определения среднего масштаба находятся в следующей зависимости:

$$\frac{\Delta l}{L} = \frac{\Delta m}{m_{cp}}. \quad (4.58)$$

Используя формулу (4.58), вычислим предельную длину линии, которая может быть измерена по аэрофотоснимку с требуемой точностью при использовании среднего масштаба:

$$L = \frac{m_{cp}}{\Delta m} \Delta l. \quad (4.59)$$

На основании этих расчетов можем сделать вывод, что длины неискаженных отрезков (базисов), по которым определяется масштаб снимка, должна быть больше длины линий, которые будут измеряться на аэрофотоснимке.

Для определения *частных масштабов* в зонах точек A, B, D и F на аэрофотоснимке и фотоплане с точностью до 0,1 мм измеряют базисы AA_1 и AA_2, BB_1 и BB_2, DD_1 и DD_2, FF_1 и FF_2 .

Знаменатели масштабов для каждого базиса вычисляют по формуле (4.55).

Вычисляем среднее значение частного масштаба для зон A, B, D и F , взяв среднее из значений частных масштабов соответствующих отрезков.

Значение частного масштаба для всего аэрофотоснимка вычисляем по формуле

$$m_{\text{cp}} = \frac{m_A + m_B + m_D + m_F}{4} \quad (4.60)$$

Вопрос 4.13 Смещение изображения контурной точки на аэрофотоснимке из-за влияния рельефа местности

Линейные искажения, вызванные влиянием рельефа местности.

Ранее было показано, что аэрофотоснимок является изображением местности в центральной проекции, а топографический план – в ортогональной, и что эти проекции совпадают только в случаях, когда снимок горизонтальный, а местность равнинная.

На рис. 4.23 изображен горизонтальный снимок P^0 всхолмленной местности, полученный с высоты H над плоскостью E . Точки местности A и B , имеющие превышения над плоскостью E соответственно $+h$ и $-h$, изобразились в виде точек a и b , расположенных на расстояниях $oa=r_a$ и $ob=r_b$ от главной точки.

Точка A^0 и B^0 являются ортогональными проекциями точек местности A и B на предметную плоскость E ; их проекции, если бы они могли быть получены, располагались бы в точках a_0 и b_0 . Следовательно, отрезки aa^0 и bb^0 являются смещениями (искажениями) δ_h точек a и b , вызванными влиянием рельефа местности. Поскольку точка надира является точкой схода перспектив всех отвесных линий, эти смещения всегда совпадают с направлениями, проходящими через точку надира.

Для определения величины искажения δ_h рассмотрим две пары подобных треугольников Soa, AA^0A' и $Saa^0, SA'A^0$, из которых следует:

$$aa^0 = A'A^0 \times So / SO = AA^0 \times oa / SO \quad (4.61)$$

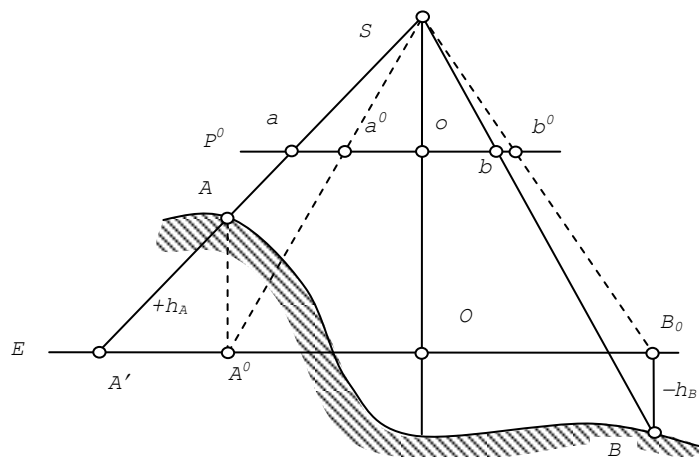


Рис. 4.23. Линейные смещения, вызванные влиянием рельефа местности

Поскольку $AA^0=h$, $oa=r$, $SO=H$ и $aa^0=\delta_h$, получим

$$\delta_h = \frac{rh}{H} \quad (4.62)$$

При $h=50$ м, $r=100$ мм и $H=2000$ м смещение $\delta_h=2,5$ мм, что больше смещения, обусловленного влиянием угла наклона.

Формула (4.62) получена без учета угла наклона снимка и уже поэтому не является строгой. Однако она широко применяется в фотограмметрической практике, поскольку допускаемая ошибка вычислений величины искажения δ_h при плановой аэрофотосъемке не превышает 0,1–0,2 мм.

Заметим, что искажения точек, вызванные влиянием рельефа местности, объясняются тем, что масштаб их изображения крупнее масштаба изображения средней плоскости снимка при положительном превышении над ней (точка ближе к центру фотографирования), и мельче при отрицательном превышении (точка дальше от центра).

Используя формулу (4.62), можно установить предельное превышение, при котором величина искажения δ_h не превысит заданного предела. Учитывая, что можно допускать как положительные, так и отрицательные превышения, можно вести речь о некоторой зоне, в пределах которой искажения окажутся допустимыми.

В соответствии с требованиями Инструкции по фотограмметрическим работам, смещение точки вследствие влияния рельефа местности не должно превышать $0,3 \div 0,4$ мм на плане. Для расчета высоты зоны, в пределах которой это требование может быть выполнено, соответствующим образом преобразуем формулу (4.62), учтем коэффициент увеличения снимка (и искажения) и удвоим полученный результат:

$$Q = 2h_{\text{пред}} \leq \frac{0,6fM}{1000r} \quad (4.63)$$

где M – знаменатель масштаба плана;

r – расстояние (мм) от центра снимка до угла рабочей площади;
 f – фокусное расстояние съёмочной камеры.

Анализ формул (4.62) и (4.63) позволяет сделать несколько выводов.

1. Величина смещения $\delta_h=0$ при $r=0$ или $h=0$, т.е. когда точка располагается на начальной плоскости E или совпадает с точкой надира.

2. При положительных превышениях точек местности над предметной плоскостью смещения δ_h направлены к точке надира, а при отрицательных превышениях – от точки надира.

3. Для уменьшения влияния рельефа местности следует увеличивать либо высоту фотографирования H , либо фокусное расстояние f .

Отметка предметной плоскости E снимка (рис. 4.23), относительно которой отсчитываются превышения в формулах (4.62) и (4.63), вычисляется как полусумма максимальной и минимальной отметок точек в пределах его рабочей площади.

Вопрос 4.14 Смещение контурных точек на снимке за угол наклона

Пусть наклонный (P) и горизонтальный (P^0) снимки получены одной съёмочной камерой, имеют общий центр проекции S (рис. 4.24, а), а точка местности M изобразилась на них в виде точек m и m^0 . Такие снимки пересекаются по линии неискаженных масштабов $h_c h_c$.

Поскольку изображение горизонтального снимка P^0 соответствует ортогональной проекции, его можно рассматривать как предметную плоскость, а линию неискаженных масштабов – как основание картины.

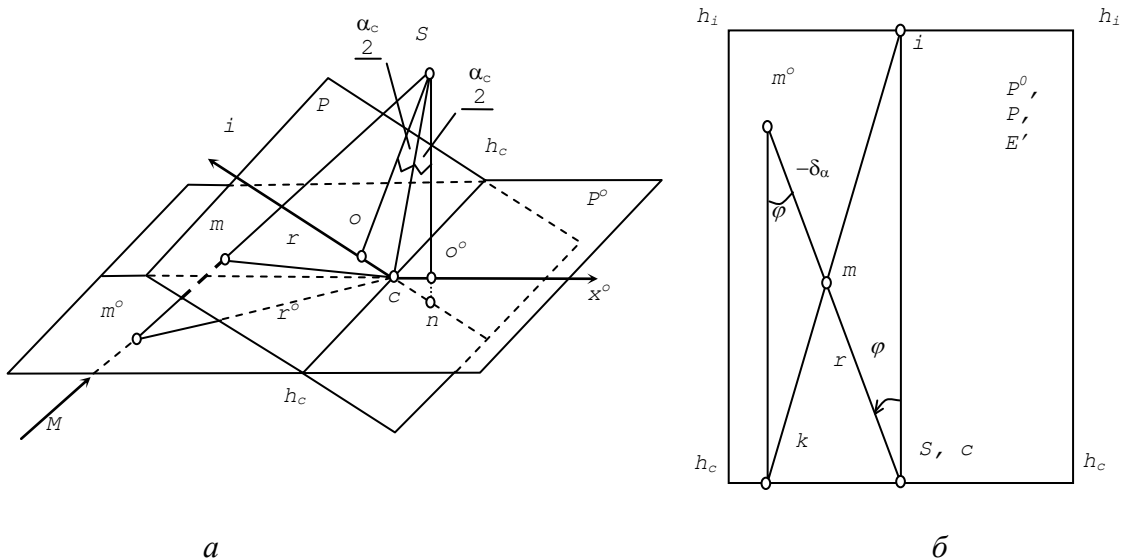


Рис. 4.24. Линейные искажения, вызванные влиянием угла наклона аэроснимка на пространственном чертеже (а) и на эпюре сложения (б)

С учетом этого получим эпюр сложения (рис. 4.24, б), выполнив вращение картинной плоскости и плоскости действительного горизонта согласно условиям теоремы Шаля. На эпюре сложения центр проекции

Совместится с точкой нулевых искажений c , которая в данном случае будет одновременно и главной точкой основания картинной плоскости, а точки m и m^0 окажутся лежащими на одном проектирующем луче Smm^0 . Обозначим удаления точек m и m^0 от точки нулевых искажений через r и r^0 соответственно. Тогда искажение $\delta_\alpha = r - r^0$, а $mm^0 = -\delta_\alpha$. Из подобных треугольников mm^0k и icm можно записать:

$$mm^0 / m^0k = mc / ic, \quad (4.64)$$

или

$$mm^0 = m^0k \times mc / ic. \quad (4.65)$$

Поскольку $mc = r_c$, $ic = f / \sin \alpha_c$ и $m^0k = r^0 \cos \varphi$, то

$$\delta_\alpha = -\frac{r_c r_c^0}{f} \sin \alpha_c \cos \varphi. \quad (4.66)$$

Эта формула определяет величину искажения, вызванного влиянием угла наклона снимка, или перспективного искажения. В таком виде эта формула применяется в конструкциях ряда фотограмметрических приборов.

Если в правой части формулы (4.66) сделать замену r^0 на $r - \delta_\alpha$, то после несложных преобразований получим окончательно

$$\delta_\alpha = -\frac{r_c^2 \sin \alpha_c \cos \varphi}{f - r_c \sin \alpha_c \cos \varphi}. \quad (4.67)$$

Опустив в знаменателе второе слагаемое, что оправдано при использовании плановых снимков, получим

$$\delta_\alpha = -\frac{r_c^2}{f} \sin \alpha_c \cos \varphi. \quad (4.68)$$

При $\alpha_c = 1^0$, $f = r_c = 100$ мм, и $\varphi = 0$ найдем, что $\delta_\alpha = 1,75$ мм.

Индекс «с» в обозначении радиус-вектора r напоминает, что он отсчитывается от точки нулевых искажений, а угол φ – от положительного направления главной вертикали против хода часовой стрелки.

Легко видеть, что максимальное искажение δ_α имеют точки, расположенные на главной вертикали ($\cos \varphi = \pm 1$), причем при $\alpha_c < 3^0$:

$$\delta_{\alpha \max} = \frac{r_c^2 \alpha'_c}{f \rho'}. \quad (4.69)$$

По формуле (4.69) можно вычислить радиус полезной площади аэроснимка r , в пределах которого максимальное искажение δ_α не превысит заданного значения Δ_α . Заменив в (4.69) r_c на r и δ_α на Δ_α , получим

$$r = \sqrt{\frac{f \Delta_\alpha \rho'}{\alpha'_c}}. \quad (4.70)$$

При $\Delta_\alpha=0,3\text{мм}$, $\alpha_c=30'$ и $f=100\text{ мм}$ $r= 58,5\text{ мм}$, а при $f=200\text{ мм}$ $r= 82,3\text{ мм}$.

Анализ полученных формул позволяет сделать несколько выводов.

1. Величина искажения $|\delta_\alpha|$ тем больше, чем больше угол наклона α_c и чем меньше фокусное расстояние съёмочной камеры f . При постоянных значениях α_c и f величина искажения зависит от положения точки на снимке, т.е. от величин угла φ и радиуса-вектора r_c .

2. Полезная площадь планового аэроснимка близка к его рабочей площади.

3. На линии неискаженных масштабов $h_c h_c$ величины искажений δ_α равны нулю ($\cos\varphi=0$), и масштаб ее изображения соответствует масштабу горизонтального снимка.

4. Длина отрезка, симметричного относительно точки нулевых искажений, не искажается: углы для концов отрезка различаются на 180° , а их искажения равны по величине и противоположны по знаку.

Смещения точек, вызванные влиянием угла наклона снимка, полностью устраняются в процессе его трансформирования.

Вопрос 4.15 Искажение изображения площади

Линейные искажения точек снимка, вызванные влиянием угла наклона и рельефа местности, приводят к искажениям линий, следовательно, и площадей участков, ограниченных этими линиями. Причем отдельные и независимые влияния угла наклона снимка и превышений между точками местности на искажения площадей суммируются. Рассмотрим эти источники.

Влияние угла наклона на искажения площадей участков установим, исходя из следующих соображений. Пусть имеем на плоской местности квадрат со стороной L , расположенный симметрично относительно главной вертикали (рис. 4.25). На наклонном снимке этот квадрат изобразится в виде трапеции со средней линией $ab=l_1$ и высотой $cd=l_2$. Площади участка на наклонном (P) и на горизонтальном (P^0) снимках равны:

$$P=l_1 l_2=(L/m_h) \times (L/m_v) \quad (4.71)$$

и

$$P^0=l^2=L^2 f^2 / H^2. \quad (4.72)$$

Искажение площади есть разность площадей P и P^0 , которая с учетом масштаба по вертикали и горизонтали равна:

$$\Delta P = P - P^0 = \frac{L^2 f^2}{H^2} [(\cos \alpha_c - \frac{x}{f} \sin \alpha_c)^3 - 1]. \quad (4.73)$$

Более показательнее относительное искажение площади:

$$\frac{\Delta P}{P^0} = (\cos \alpha_c - \frac{x}{f} \sin \alpha_c)^3 - 1. \quad (4.74)$$

Если центр участка k совпадает с главной точкой снимка ($x=0$), то

$$\frac{\Delta P}{P^0} = \cos^3 \alpha_c - 1. \quad (4.75)$$

Расчеты по формуле (4.74) показывают, что площадь участка, изображенного на снимке симметрично относительно главной его точки, определяется с достаточно высокой точностью: при углах наклона α_c , равных 30 и 60 минут, относительное искажение составляет 1/ 8700 и 1/2900 соответственно.

Влияние рельефа местности на искажения площадей участков, изображенных на плановом снимке, определим исходя из ошибок определения масштаба снимка, или, точнее, высоты фотографирования над средней плоскостью, расчет которой обычно выполняется по опознанным на карте (на местности) точкам и последующего измерения расстояния между ними.

Площадь земельного участка на местности (P^0) вычисляют по результатам ее измерения на снимке (P):

$$P^0 = P m^2 = P \times H^2 / f^2. \quad (4.76)$$

Неточное определение высоты фотографирования H (или не учет превышений h между точками ее определения) приведет к ошибке определения масштаба и площади участка. Для установления ошибки функции P^0 в зависимости от ошибки аргумента H в соответствии с правилами теории ошибок измерений выполним дифференцирование:

$$dP^0 = P \frac{2HdH}{f^2} = P \frac{2H^2}{f^2} \times \frac{dH}{H} = 2P^0 \frac{dH}{H}. \quad (4.77)$$

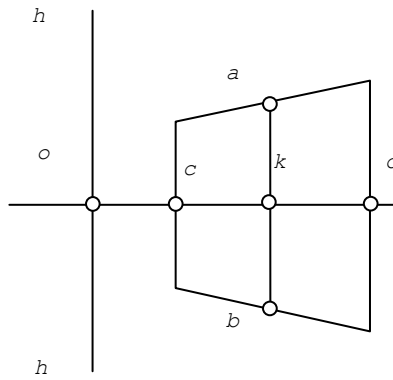


Рис. 4.25. Искажение изображения площади

Примем $dP^0 = \Delta P$ и $dH = h$. Тогда относительная ошибка площади

$$\frac{\Delta P}{P} = 2 \frac{h}{H}. \quad (4.78)$$

Из полученной формулы следует, что влияние рельефа достаточно ощутимо: при высоте фотографирования $H=2000$ м и превышении $h=50$ м относительная ошибка определения площади составит 5 % или $1/20$ от ее величины.